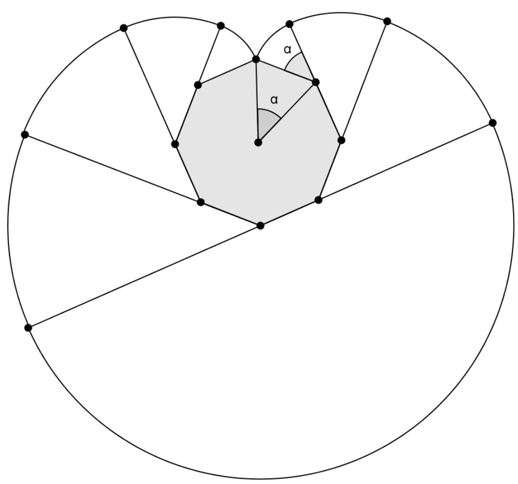
Problema Nº1.

1. Se tiene un silo con forma de prisma cuya base es un octógono regular de L metros de lado, situado en un prado totalmente plano. Se ata a dicho silo un caballo por medio de una cuerda con la longitud precisa para que alcance el lado opuesto del silo (la cuerda mide 4L metros). Hallar la superficie de hierba que el caballo tiene a su disposición para poder pastar.
2. Hallar la superficie de hierba en el caso de que el silo fuera un cilindro de radio R metros. (Longitud cuerda: πR metros)

Solución:

1.1



Hacemos una partición de la cuerda de longitud $4L$:

$P = \{0, L, 2L, 3L, 4L\}$

$$\alpha = \pi - \frac{(8-2)\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Así la superficie es suma de sectores circulares:

$$S = \frac{\pi L^2}{8} + \frac{\pi(2L)^2}{8} + \frac{\pi(3L)^2}{8} + \frac{\pi(4L)^2}{2} + \frac{\pi(4L)^2}{8} + \frac{\pi(3L)^2}{8} + \frac{\pi(2L)^2}{8} + \frac{\pi L^2}{8}$$

$$= \frac{2\pi L^2}{8}\left[1^2 + 2^2 + 3^2\right] + \frac{\pi(4L)^2}{8} + \frac{\pi(4L)^2}{2}$$

$$= \frac{7\pi L^2}{2} + 10\pi L^2$$

$$= \frac{27}{2}\pi L^2 \quad metros^2$$

1.2

Generalizamos a un polígono de 2n lados. Hacemos una partición de la cuerda de longitud πR:

$$P_n=\left\{\frac{0}{n}\cdot\pi R,\ \frac{1}{n}\cdot\pi R,\ \frac{2}{n}\cdot\pi R,\dots,\frac{n}{n}\cdot\pi R\right\}$$

$$\alpha_n=\pi-\frac{(2n-2)\pi}{2n}=\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$$

Así:

$$S_n=\frac{2\pi}{2n}\left[\left(\frac{1}{n}\cdot\pi R\right)^2+\left(\frac{2}{n}\cdot\pi R\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\cdot\pi R\right)^2\right]+\frac{\pi\left(\frac{n}{n}\cdot\pi R\right)^2}{2n}+\frac{\pi\left(\frac{n}{n}\cdot\pi R\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\pi^3R^2}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]+\frac{\pi^3R^2}{2n}+\frac{\pi^3R^2}{2}$$

El área pedida es $S=\lim_{n\to\infty}S_n$.

Consideramos $\Gamma=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$.

Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$ *continua* $\Rightarrow f$ *integrable*.

La partición $Q_n=\left\{x_0=\frac{0}{n},\ x_1=\frac{1}{n},\dots,x_n=\frac{n}{n}\right\}$ *de* $[0,1]$ cumple $x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n}$ y además las sumas de Riemann son:

$$S(f,Q_n)\overset{f\ crece}{=}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}+\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}$$

$$s(f,Q_n)\overset{f\ crece}{=}\frac{1}{n}\cdot\frac{0}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}$$

Así:

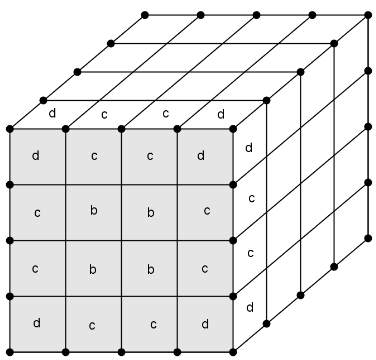
$$S(f,Q_n)-s(f,Q_n)=\frac{1}{n}\cdot 1\underset{n\to\infty}{\to}0\overset{f\ integ}{\Rightarrow}\int_0^1x^2dx=s(f,Q_n)=\Gamma\le S(f,Q_n)=\int_0^1x^2dx$$

$$\Rightarrow\Gamma=\int_0^1x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\pi^3R^2\cdot\frac{1}{3}+0+\frac{\pi^3R^2}{2}=\frac{5}{6}\pi^3R^2\quad metros^2$$

<u>Problema Nº2.</u>

Con dados de 1 cm. de arista se construye un cubo sólido de 4 cm. de arista y se pinta de negro toda la superficie del cubo así construido. Se deshace el cubo y cogiendo los dados al azar sin mirarlos se construye de nuevo. Calcular la probabilidad de que en el nuevo cubo figure, al menos, una cara blanca.

Solución:



$$P(\textit{alguna cara blanca}) = 1 - P(\textit{ninguna blanca})$$
$$= 1 - P(\textit{todas las caras negras})$$

Clasifiquemos los cubitos:

a. Cubos interiores: tiene 0 caras pintadas. Hay 8
b. Cubos centrales: tienen una cara pintada. Hay 24
c. Cubos laterales: tienen 2 caras pintadas. Hay 24
d. Cubos en vértices: tienen 3 caras pintadas. Hay 8

Sea $B_j =$ "*coloco bien los cubos* j", $j \in \{a, b, c, d\}$, así:

$$P(\textit{todas negras}) = P(B_a \cap B_b \cap B_c \cap B_d) =$$
$$= P(B_a) \cdot P(B_b / B_a) \cdot P(B_c / B_a \cap B_b) \cdot P(B_d / B_a \cap B_b \cap B_c)$$

Para colocar bien un cubo j primero debo elegirlo de entre todos, y luego colocarlo bien de las 4·6=24 maneras.

$$P(\textit{todas negras}) = \left(\frac{1}{\binom{64}{8}} \cdot \left(\frac{24}{24}\right)^{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{56}{24}} \cdot \left(\frac{4}{24}\right)^{24} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{32}{24}} \cdot \left(\frac{2}{24}\right)^{24} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{8}{8}} \cdot \left(\frac{3}{24}\right)^{8} \right)$$

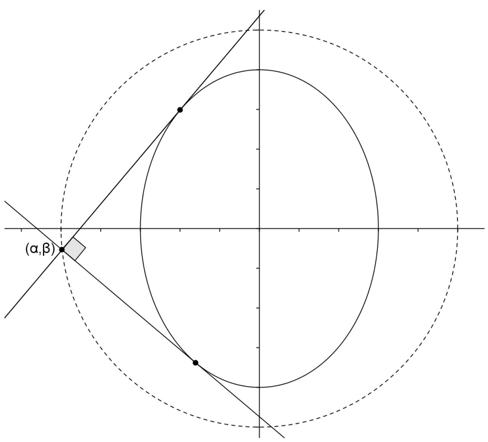
$$\Rightarrow P(\textit{alguna cara blanca}) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\binom{64}{8}} \cdot \left(\frac{24}{24}\right)^{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{56}{24}} \cdot \left(\frac{4}{24}\right)^{24} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{32}{24}} \cdot \left(\frac{2}{24}\right)^{24} \right) \cdot \left(\frac{1}{\binom{8}{8}} \cdot \left(\frac{3}{24}\right)^{8} \right)$$

Problema Nº3.

Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bajo un ángulo recto.

Solución:



Sea (α,β) un punto del lugar pedido. De todas las rectas que pasan por (α,β), es decir, $y-\beta=m(x-\alpha)$ (a excepción de $x=\alpha$), buscamos las que son tangentes a la elipse, es decir las que sólo la cortan en un punto.

Así el siguiente sistema sólo debe tener una única solución:

$$\left\{\begin{array}{l} y-\beta=m(x-\alpha) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left[m^2\left(x^2-2x\alpha+\alpha^2\right)+\beta^2+2m\beta(x-\alpha)\right]=1$$

$$a^2b^2=b^2x^2+a^2\left[m^2x^2-2m^2\alpha x+m^2\alpha^2+\beta^2+2m\beta x-2m\alpha\beta\right]$$

$$a^2b^2=b^2x^2+a^2m^2x^2-2m^2a^2\alpha x+a^2m^2\alpha^2+a^2\beta^2+2m\beta a^2x-2m\beta a^2\alpha$$

$$0=\left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2ma^2\left(\beta-m\alpha\right)x+a^2\left(m^2\alpha^2+\beta^2-2m\alpha\beta-b^2\right)$$

$$0=\left(b^2+a^2m^2\right)x^2+2ma^2\left(\beta-m\alpha\right)x+a^2\left[\left(m\alpha-\beta\right)^2-b^2\right]$$

, que es una ecuación de segundo grado cuyo discriminante debe ser 0 porque las rectas son tangentes.

$$0=4m^2a^4\left(m\alpha-\beta\right)^2-4a^2\left[\left(m\alpha-\beta\right)^2-b^2\right]\cdot\left[b^2+a^2m^2\right]$$

Como $4a^2\neq 0$,

$$0=a^2m^2\left(m\alpha-\beta\right)^2-\left(m\alpha-\beta\right)^2b^2-\left(m\alpha-\beta\right)^2a^2m^2+b^4+b^2a^2m^2$$

Como $b^2 \neq 0$,
$0 = b^2 + a^2m^2 - \left(m\alpha - \beta\right)^2$
$0 = b^2 + a^2m^2 - m^2\alpha^2 + 2m\alpha\beta - \beta^2$

Es decir, $0 = \left(a^2 - \alpha^2\right)m^2 + 2m\alpha\beta + b^2 - \beta^2$ cuyas soluciones m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas tangentes a la elipse y además cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$, por ser perpendiculares.

Estudiando $0 = m^2 + \dfrac{2\alpha\beta}{a^2 - \alpha^2}m + \dfrac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2}$, pues $a^2 \neq \alpha^2$, las fórmulas de Cardano-Vieta aseguran $\dfrac{b^2 - \beta^2}{a^2 - \alpha^2} = m_1 \cdot m_2 = -1$
$\Rightarrow b^2 - \beta^2 = \alpha^2 - a^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$.

El lugar pedido es $\boxed{C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2}$, conocido bajo el nombre de Circunferencia de Monge, por ser éste matemático francés el primero en observar dicha propiedad.